Les trois parties du problème sont indépendantes.

Le système (1) évoqué à la partie II-4°) est défini dans la partie I-2°)

On considère dans ce problème des matrices fonctions d'une variable réelle t. Cela signifie que les coefficients a_{ij} de la matrice A sont des fonctions de t.

On dit alors que la matrice A(t) est continue, ou dérivable, si chaque coefficient a_{ij} l'est. La dérivée de A est alors la matrice A'(t) dont les coefficients sont les dérivées $a'_{ij}(t)$ des coefficients a_{ij}.

Une suite (A_n), $A_n = (a_{ijn})$ est convergente si chacune des suites (a_{ijn}) l'est.

La limite est alors la matrice de coefficient $\alpha_{ij} = \lim_{n\to+\infty} a_{ijn}$.

On considère dans la suite les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

I 1°) Déterminer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

2°) On considère le système différentiel :

(1) $X' = AX$, $X(0) = X_0$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est une matrice colonne inconnue, $X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ une matrice donnée, a,b,c étant des réels.

Déterminer la matrice X.

3°) On choisit $a = b = c = 1$.

Soit Γ la courbe de représentation paramétrique, dans le repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Construire les projections de Γ sur les trois plans de coordonnées.

On précisera s'il y a lieu : les points stationnaires et leurs tangentes, les branches infinies, les tangentes au point 0 (on prendra cinq centimètres pour unité).

II 1°) Soit $B = A - I$.

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Expliciter les coefficients de A^n.

2°) Pour tout réel t et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice :

$$R_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Montrer que la suite $(R_n(t))$ converge et expliciter sa limite R(t).

3°) Montrer que R est dérivable et calculer R'(t).

Etablir une relation entre R'(t), R(t) et A.

4°) Expliquer comment on pourrait utiliser le résultat précédent pour résoudre le système différentiel (1).

III Pour tout réel t, on définit la matrice :

$$U(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 1 & t \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On désigne par G l'ensemble de ces matrices lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que le produit matriciel définit sur G une structure de groupe.

Préciser le neutre et, pour tout élément, le symétrique. G est-il commutatif ?

2°) Soit (t_n) une suite de nombres réels. On définit une suite de matrices (X_n) par les relations :

$$X_{n+1} = U(t_n)\, X_n \quad , \quad X_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad , \quad a, b, c \text{ étant des réels donnés.}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante que doit vérifier la suite (t_n) pour que la suite (X_n) soit convergente.

3°) On suppose que $t_n = 2^{-n}$, vérifier que dans ce cas la suite (X_n) converge et calculer sa limite.

* * *
*